

Многочлены Жегалкина



Сложение по модулю 2

Сложение по модулю 2 задается таблицей истинности

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Утверждение 1

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z;$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz;$$

$$x \oplus x = 0;$$

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$



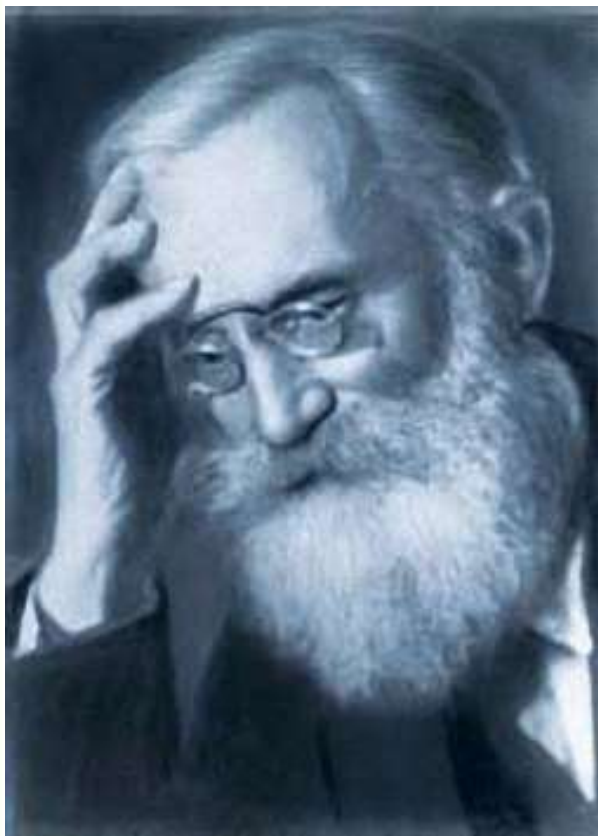
Определение 1

Булева функция, записанная с помощью операций конъюнкция, сложение по модулю два и единицы, называется многочленом (полиномом) Жегалкина.

Приведения булевой функции к многочлену Жегалкина (способ 1)

- 1) Приводим функцию к ДНФ.
- 2) Избавляемся от всех дизъюнкций с помощью законов Моргана.
- 3) Избавляемся от всех отрицаний.
- 4) Раскрываем все скобки.
- 5) Упрощаем полученное выражение.





Жегалкин И.И. (22.07. 1869-28.03.1947)- русский математик и логик

Дата рождения	22 июля (3 августа) 1869
Место рождения	Мценск, Орловская губерния, Российская империя ^[1]
Дата смерти	28 марта 1947 (77 лет)
Место смерти	Москва, СССР
Страна	 Российская империя,  РСФСР (1917—1922),  СССР
Научная сфера	математика, логика
Место работы	Московский университет, МВЖК, МГУ
Альма-матер	Московский университет (1893)
Учёная степень	магистр математики (1907), доктор физико-математических наук
Учёное звание	профессор (1923)
Известен как	автор математического понятия полином Жегалкина



Пример

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= \overline{x}yz \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z} = \overline{\overline{\overline{x}yz} \cdot \overline{\overline{\overline{x}\overline{y}\overline{z}}}} = \\
 &= (x(y \oplus 1)z \oplus 1)((x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1 = \\
 &= (xyz \oplus xz \oplus 1)((xz \oplus x \oplus z \oplus 1)y \oplus 1) \oplus 1 = \\
 &= (xyz \oplus xz \oplus 1)(xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus 1) \oplus 1 = \\
 &= xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus \\
 &\oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = \\
 &= xz \oplus xy \oplus yz \oplus y
 \end{aligned}$$



Приведения булевой функции к многочлену Жегалкина (способ 2)

- 1) Приводим функцию к СДНФ.
- 2) Заменяем дизъюнкцию на сложение по модулю 2
- 3) Избавляемся от всех отрицаний.
- 4) Раскрываем все скобки.
- 5) Упрощаем полученное выражение.



Пример

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} = x\bar{y}z \oplus \bar{x}y\bar{z} = \\ &= x(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) = \\ &= xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y = \\ &= xz \oplus xy \oplus yz \oplus y \end{aligned}$$



Приведения булевой функции к многочлену Жегалкина (способ 3)

Столбец значений булевой функции выписывается в строку. Под ней формируется строка, значения которой являются суммой по модулю 2 двух ближайших значений предыдущей строки. Остальные строки формируются по тому же принципу. Последняя строка будет состоять из единственного значения, а вся таблица будет иметь вид равнобедренного треугольника. Многочлен Жегалкина составляется из тех слагаемых, в чьих строках имеется единица на левом боковом ребре треугольника, а каждое слагаемое является произведением тех переменных, в чьих позициях в данной строке таблицы истинности стоят единицы.



Пример

x	y	z	$x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$	
0	0	0	0	0 0 1 0 0 1 0 0
0	0	1	0	0 1 1 0 1 1 0
0	1	0	1	1 0 1 1 0 1
0	1	1	0	1 1 0 1 1
1	0	0	0	0 1 1 0
1	0	1	1	1 0 1
1	1	0	0	1 1
1	1	1	0	0



$$f(x, y, z) = xz + xy + yz + y$$

Приведите к многочлену
Жегалкина функцию

$$f(x, y, z) = (x \rightarrow yz)(\bar{y} \leftrightarrow x\bar{z})$$

$$f(x, y, z) = xyz + xy + y$$

